EJERCICIO VECTORES Y VALORES PROPIOS

Determine todos los valores propios y los vectores propios asociados de cada una de las matrices siguientes.

a. $\begin{pmatrix} -1 & -1+i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución.

Para hallar los valores y los vectores propios asociados de cada matriz debemos tomar que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ osea,

a. $\begin{pmatrix} -1 & -1+i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

por lo tanto podemos tomar a la ecuación como un sistema de ecuaciones lineales

a.

$-x_1 + (-1+i)x_2 = \lambda x_1$

$x_1 = \lambda x_2$

y resolverlo como un sistema lineal $0 = x_1(\lambda+1) + x_2(1-i)$, $0 = \lambda x_2 - x_1$

```
sage] var('c,i')
```

(c, i)

```
sage] matrix([[c+1,-1,0],[1-i,c,0]])
```

$$\begin{pmatrix} c+1 & -1 & 0 \\ 1-i & c & 0 \end{pmatrix}$$

```
sage] m=matrix([[c+1,-1],[1-i,c]])
sage] e=m.det()
sage] e
```

$$-i + c(c+1) + 1$$

```
sage] solve(e==0,c)
```

$$\left[c = \frac{-\left(\sqrt{4i-3}\right) - 1}{2}, \right.$$
$$\left. c = \frac{\sqrt{4i-3} - 1}{2}\right]$$

```
sage] var('c1,c2,a,b')
    (c1, c2, a, b)
sage] c1=r[0]
sage] c2=r[1]
sage] l=matrix([[c+1,-1,a],[1,c,b]])
```

b.

$ix_1 + x_2 = \lambda x_1$

$x_1 + ix_2 = \lambda x_1$

$x_3 = \lambda$

c.

$-x_2 = \lambda x_1$

$x_1 = \lambda x_2$

$x_2 = \lambda x_3$

d.

$-9x_3 = \lambda x_1$

$x_2 = \lambda x_2$

$x_1 = \lambda x_3$